Familles de Perron et problème de Dirichlet.

Par M. BRELOT à Bordeaux.

1. Parmi les solutions du problème classique de DIRICHLET vient au premier rang peut-être la méthode de M. PERRON[1]), obtenue de manière voisine et indépendante, presque en même temps, par M. REMAK[2]) et dont l'originalité suscita divers travaux. Elle fut simplifiée par MM. T. RADÓ—F. RIESZ[3]), reprise aussi par M. CARATHÉODORY[4]), étendue récemment par M. GUIDO FUBINI[5]) à des fonctions plus générales que les fonctions harmoniques. D'autre part, M. WIENER[6]) considérant les deux enveloppes issues des deux familles analogues de fonctions sousharmoniques et surharmoniques les identifia dans le cas d'une distribution-frontière f continue, avec sa solution généralisée du problème de DIRICHLET, et entreprit leur étude pour f discontinue, en liaison avec un travail antérieur[7]).

---

1) O. PERRON, Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$, *Math. Zeitschrift*, **18** (1923), pp. 42—54.

2) R. REMAK. Über potentialkonvexe Funktionen, *Math. Zeitschrift*, **20** (1924), pp. 126—130.

3) T. RADÓ—F. RIESZ, Über die erste Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$, *Math. Zeitschrift*, **22** (1925), pp. 41- 44. M. F. RIESZ a bien voulu me signaler une variante due à H. WHITNEY, Note on Perron's Solution of the Dirichlet Problem, *Proceedings of the National Academy of Sciences U. S. A*, **18** (1932), pp. 68—70.

4) C. CARATHÉODORY, On Dirichlet's Problem, *American Journal of Math.*, **59** (1937), pp. 709—731.

5) G. FUBINI, Sopra una nuova classe di problemi al contorno, *Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, 61 (1939), pp. 304—313.

6) N. WIENER, Note on a Paper of O. Perron, *Journal of Math. and Phys., Massachusetts Institute of Technology*, **4** (1925), pp. 21—32.

7) N. WIENER, The Dirichlet Problem, *Journal of Math. and Phys., Massachusetts Institute of Technology*, **3** (1924), pp. 127—146.

Je vais reprendre ici toute cette question. D'abord à partir de quelques notions très élémentaires et en me limitant au cas original de f bornée quelconque, je retrouverai autrement l'harmonicité des enveloppes et plus simplement leur identité pour f continue, après quoi le théorème fondamental de M. WIENER à la base de sa solution généralisée n'est plus qu'une propriété de l'enveloppe commune. Cela n'ira pas sans une étude de ces enveloppes comme fonctionnelles et sera suivi d'une introduction de la notion, d'usage essentiel plus loin, des points irréguliers.

Après cet exposé synthétique élémentaire qui ne comportera que peu de résultats nouveaux, j'utiliserai pour aller plus avant, dans un second chapitre, grâce à l'intégrale de LEBESGUE–STIELTJES, les développements récents de la théorie du potentiel dont ne disposait pas M. WIENER. Je pourrai, en liaison avec ceux-ci, étudier en toute généralité les enveloppes relatives à f quelconque, et, en caractérisant les cas de coïncidence, préciser définitivement l'extension maxima du problème de DIRICHLET esquissée par M. WIENER, qui avait été malencontreusement arrêté par un exemple inexact. Dans l'expression des résultats apparaîtra essentiellement la distribution de masses du balayage polaire qui sera d'ailleurs retrouvée par représentation (classique selon M. F. RIESZ) d'une fonctionnelle linéaire par une intégrale. La difficulté est au fond d'élucider le cas d'une distribution-frontière semi-continue. Je me suis basé pour cela sur l'existence (dans un domaine borné) d'une fonction harmonique >0 tendant vers $+\infty$ aux points-frontière irréguliers: ce qui résulte immédiatement de la propriété (KELLOGG—EVANS) de l'ensemble des points irréguliers d'être de capacité nulle et, d'autre part, de l'existence (EVANS) d'une charge >0 sur tout ensemble borné fermé de capacité nulle assurant sur lui le potentiel $+\infty$. Il y aurait donc grand intérêt soit à procéder plus directement, soit à établir au moins ce théorème d'existence de EVANS d'une manière directe et beaucoup plus simple que la méthode originale qui suppose un stade avancé de la théorie du potentiel.

Dans tout cela je me limiterai aux ensembles *ouverts bornés*, ce qui permet de traiter presque sans différence les cas des espaces à $n \geqq 2$ dimensions. Pour le langage je me placerai dans le cas du plan; mais il y a *extension immédiate aux espaces supérieurs.*

Enfin je me dois de remercier vivement M. DIEUDONNÉ dont j'ai utilisé la compétence particulière en matière d'intégration et qui, ayant bien voulu lire ma rédaction, m'a fait diverses critiques dont j'ai profité ici.

I. Résultats fondamentaux élémentaires.

2. *Notions préliminaires.* Une fonction $u(M)$ continue dans un ensemble ouvert Ω y est dite *harmonique* si en chaque point M, on a *pour r assez petit:*

$$u(M) = \mathfrak{M}_M^r u$$

moyenne de u sur la circonférence de centre M et rayon r, ou ce qui est équivalent

$$u(M) = \mathfrak{A}_M^r u$$

moyenne dans le cercle.

D'où: impossibilité d'un extremum en un point dans le voisinage duquel $u \neq$ Constante; si Ω est borné, égalité de la borne supérieure (ou inférieure) de u avec celle, d'ailleurs atteinte, de la plus grande limite (ou plus petite limite) de u à la frontière; identité de deux fonctions harmoniques prenant des valeurs limites déterminées finies et égales à la frontière.

D'après une formule de Green, un critère suffisant d'harmonicité est l'existence de dérivées secondes continues et la nullité du laplacien ordinaire. D'après cela l'intégrale de Poisson pour toute fonction f sommable de l'arc sur la circonférence est harmonique à l'intérieur; elle prend d'ailleurs en tout point P de continuité de f la valeur de $f(P)$ (finie ou non) (c. à. d. $u(M) \to f(P)$ quand M intérieur $\to P$).

Si u est harmonique dans Ω, elle est identique à l'intégrale de Poisson dans tout cercle complètement intérieur avec mêmes valeurs périphériques; d'où l'existence de dérivées continues, l'analyticité, et aussi la propriété générale des deux moyennes pour tout cercle complètement intérieur, propriété dont dérivent aussitôt par exemple, des théorèmes sur l'harmonicité des limites de suites et l'égale continuité des familles bornées.

3. La fonction $u(M)$ *continue* dans Ω y est dite *sousharmonique* si en chaque point M on a pour r assez petit: $u(M) \leq \mathfrak{M}_M^r u$ ou ce qui est équivalent $u(M) \leq \mathfrak{A}_M^r u$.

D'où: impossibilité d'un maximum en un point dans le voisinage duquel $u \neq$ Constante. Si Ω est bornée, égalité de la borne supérieure avec celle, atteinte, de la p. g. l. à la frontière; en particulier si à la frontière p g. l. $u \leqq 0$, alors $u \leqq 0$; et si v continue dans la fermeture de Ω et harmonique dans Ω majore à la frontière les p. g. l. de u, elle majore u dans Ω. En appliquant cela aux cercles contenus dans Ω, on étend, grâce à l'intégrale de POISSON, l'inégalité de définition pour la circonférence (ou l'aire) de tout cercle complètement intérieur.

Soulignons qu'un critère suffisant de sousharmonicité est qu'il existe des dérivées secondes continues avec laplacien ordinaire $\geqq 0$ et les propriétés suivantes qui serviront de *lemmes essentiels :*

1. Si on remplace dans un cercle complètement intérieur u par l'intégrale de POISSON avec mêmes valeurs périphériques, on obtient une fonction sousharmonique dans Ω.

Car l'intégrale de POISSON majore u et la nouvelle fonction, continue, satisfait même aux points de la circonférence au critère local de sousharmonicité.

2. L'enveloppe supérieure (égale à la borne supérieure en chaque point) d'une famille quelconque de fonctions continues sousharmoniques, si elle est finie et continue, est sousharmonique.

L'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions harmoniques et bornées inférieurement dans leur ensemble dans un domaine, si elle est finie en un point, est partout finie, continue, sousharmonique.

L'existence de la borne inférieure et de la limitation supérieure en un point entraine une même limitation supérieure dans tout domaine ω complètement intérieur (application bien connue des inégalités de HARNACK tirées de l'intégrale de POISSON). Dans ω les fonctions sont donc bornées dans leur ensemble, par suite *également continues* et l'enveloppe, bornée et semi-continue inférieurement (d'après la continuité des fonctions de la famille) est alors aussi semi-continue supérieurement. Elle est donc continue et sousharmonique.

L'opposée d'une fonction sousharmonique est dite *surharmonique.* Propriétés et critères immédiats.

4. *Dans tout ce chapitre* on ne considèrera sur la frontière F de *l'ensemble ouvert borné* Ω que des distributions, *fonctions de point* données *bornées.*

Theorème de Perron. *Soit la fonction f bornée sur la frontière F de Ω borné. La famille $\mathfrak{F}_i$ des fonctions continues sous-*

harmoniques dans Ω et dont la plus grande limite en tout point-frontière est au plus égale à f admet une enveloppe supérieure harmonique.

En effet la famille $\mathfrak{F}_i$ n'est pas vide car elle contient les constantes $\leqq \underline{B}_f$ (borne inférieure de f). D'autre part, toute fonction de $\mathfrak{F}_i$ est au plus égale à $\overline{B}_f$ (borne supérieure de f). Donc l'enveloppe supérieure $S(M)$ est bornée:

$$\underline{B}_f \leqq S(M) \leqq \overline{B}_f.$$

Associons à chaque fonction de $\mathfrak{F}_i$, son enveloppe supérieure avec une même constante $k \leqq \underline{B}_f$. Les nouvelles fonctions obtenues appartiennent à $\mathfrak{F}_i$ et admettent la même enveloppe supérieure. Remplaçons chacune dans un petit cercle γ de centre P par son intégrale de POISSON de mêmes valeurs périphériques. On obtient ainsi une famille de fonctions encore dans $\mathfrak{F}_i$, majorant k, majorées par $\overline{B}_f$, toujours de même enveloppe et harmoniques dans γ. Or, son enveloppe est dans γ continue sousharmonique. Donc aussi $S(M)$.

Pour achever remarquons d'abord que sur tout ensemble fermé E de Ω, on peut approcher $S(M)$ à ε arbitraire près par une fonction de $\mathfrak{F}_i$. A chaque point P de E associons en effet une fonction de $\mathfrak{F}_i$ majorant $S(P) - \frac{\varepsilon}{2}$ en P donc majorant $S(M) - \varepsilon$ dans un cercle γ_P assez petit de centre P. Couvrons E par un nombre fini de ces cercles. L'enveloppe supérieure des fonctions associées appartient à $\mathfrak{F}_i$ et répond à la question.

Soit alors un cercle γ fermé de Ω (centre O, rayon r), puis u de $\mathfrak{F}_i$ approchant $S(M)$ à ε près sur γ (ou seulement sur sa circonférence). Remplaçons dans γ, u par son intégrale de POISSON. On obtient v de $\mathfrak{F}_i$ et

$$v(O) = \mathfrak{M}_O^r\, v.$$

D'où $S(O) \geqq v(O) \geqq \mathfrak{M}_O^r\, S - \varepsilon$ et comme ε est arbitraire, $S(O) \geqq \mathfrak{M}_O^r\, S$. O et r sont arbitraires. Donc S déjà sousharmonique est harmonique.

5. *Hypofonction et hyperfonction pour Ω, f.* A côté de la famille $\mathfrak{F}_i$, considérons celle $\mathfrak{F}_s$ des fonctions continues *surharmoniques* dans Ω et dont la plus petite limite en tout point-frontière est $\geqq f$. Elle admet une *enveloppe inférieure* harmonique, qui majore $S(M)$.

Cela résulte d'un raisonnement analogue ou de la considération de la famille initiale relative à $(-f)$ et du fait que les fonctions de $\mathfrak{F}_s$ majorent celles de $\mathfrak{F}_i$ (comme on le voit par différence).

Ces enveloppes relatives à $\mathfrak{F}_i$ et $\mathfrak{F}_s$ seront appelées *hypofonction* et *hyperfonction pour Ω, f.* On les notera $\underline{H}_f^{\Omega}(M)$, $\overline{H}_f^{\Omega}(M)$, en supprimant le signe Ω lorsque Ω est fixé.

Propriétés pour Ω fixé:

$$\overline{H}_f = -\underline{H}_{(-f)},$$

$$\underline{B}_f \leqq \underline{H}_f \leqq \overline{H}_f \leqq \overline{B}_f,$$

Si $k =$ Constante, $\left\{\begin{array}{l} \underline{H}_k = \overline{H}_k = k, \\ \underline{H}_{f+k} = \underline{H}_f + k, \quad \overline{H}_{f+k} = \overline{H}_f + k. \end{array}\right.$

Si $\lambda =$ Constante, $\left\{\begin{array}{l} \lambda > 0\colon\ \underline{H}_{\lambda f} = \lambda \underline{H}_f, \quad \overline{H}_{\lambda f} = \lambda \overline{H}_f, \\ \lambda < 0\colon\ \underline{H}_{\lambda f} = \lambda \overline{H}_f, \quad \overline{H}_{\lambda f} = \lambda \underline{H}_f. \end{array}\right.$

Si $f \leqq g$, $\quad \underline{H}_f \leqq \underline{H}_g, \quad \overline{H}_f \leqq \overline{H}_g.$

Puis $\quad \underline{H}_f + \underline{H}_g \leqq \underline{H}_{f+g} \leqq \overline{H}_{f+g} \leqq \overline{H}_f + \overline{H}_g$.

d'où

$$\underline{B}_{f-g} \leqq \underline{H}_{f-g} \leqq \left\{\begin{array}{c} \underline{H}_f - \underline{H}_g \\ \overline{H}_f - \overline{H}_g \end{array}\right\} \leqq \overline{H}_{f-g} \leqq \overline{B}_{f-g};$$

en particulier

$$\left.\begin{array}{c} |\underline{H}_f - \underline{H}_g| \\ |\overline{H}_f - \overline{H}_g| \end{array}\right\} \leqq \overline{B}_{|f-g|}$$

d'où résulte qu'en prenant dans le champ des f bornées, $\overline{B}_{|f-g|}$ comme distance, $\underline{H}_f(M)$ et $\overline{H}_f(M)$ sont des fonctionnelles de f également (en M dans Ω) et uniformément continues.

Enfin $\underline{H}_f$ est l'enveloppe supérieure des $\underline{H}_\varphi$ pour $\varphi \leqq f$ *et semi-continue supérieurement;* et $\overline{H}_f$ l'enveloppe inférieure des $\overline{H}_\psi$ pour $\psi \geqq f$ et semi-continue inférieurement.

Car si u appartient à $\mathfrak{F}_i$ par exemple, ses p. g. l. à la frontière définissent une fonction dont l'enveloppe supérieure avec $\underline{B}_f$ est une fonction bornée $\varphi \leqq f$ et semi-continue supérieurement; et $u \leqq \underline{H}_\varphi \leqq \underline{H}_f$.

R e m a r q u e. Dans les inégalités qui précèdent on peut chercher à distinguer l'égalité ou l'inégalité propres. Par exemple si f est semi-continue inférieurement et n'atteint son minimum qu'en un point O de F, $\underline{H}_f > \underline{B}_f$ dans Ω.

Prenons en effet M_0 dans Ω puis $r>0$ moindre que $\overline{OM_0}$. Soit $\varphi(M)$ égale à $\underline{B}_f$ pour $\overline{OM}\leqq r$, égale à $\underline{B}_f+k(\overline{OM}-r)$ pour $\overline{OM}>r$. On disposera de $k>0$ pour que sur F, $\varphi\leqq f$. Comme φ est sousharmonique $\underline{H}_f(M)\geqq\varphi(M)$ dans Ω et en particulier en M_0 d'où $\underline{H}_f(M_0)>\underline{B}_f$.

L'oscillation harmonique pour Ω, f. On appellera ainsi la différence $O_f^\Omega(M)=\overline{H}_f^\Omega(M)-\underline{H}_f^\Omega(M)$ (ou O_f pour Ω fixé) de propriétés immédiates:

$$O_{-f}=O_f,\quad 0\leqq O_f\leqq\overline{B}_f-\underline{B}_f,$$
$$O_K=0,\quad O_{f+K}=O_f,\quad O_{\lambda f}=|\lambda|O_f,$$
$$O_{f+g}\leqq O_f+O_g,\quad O_{\lambda f+\mu g}\leqq|\lambda|O_f+|\mu|O_g.$$

6. *Distribution résolutive et fonction de Wiener.* Lorsque $O_f^\Omega(M)\equiv 0$,[8]) f sera dite *résolutive* et la classe de ces fonctions pour Ω sera notée C_Ω. La valeur commune de $\underline{H}_f^\Omega=\overline{H}_f^\Omega$ sera dite *fonction de Wiener* et notée H_f^Ω (par abréviation H_f).

Propriétés immédiates:

1. C_Ω contient toute constante k et $H_k=k$; et dans C_Ω qui n'est donc pas vide,

$$\underline{B}_f\leqq H_f(M)\leqq\overline{B}_f.$$

2. Si C_Ω contient f et g, elle en contient toute combinaison linéaire à coefficients constants et H_f est dans C_Ω une *fonctionnelle linéaire* croissante de f, c. à. d. que

$$H_{\lambda f+\mu g}=\lambda H_f+\mu H_g\quad(\lambda,\ \mu\ \text{constantes})$$

et

$$H_f\leqq H_g\quad\text{si}\quad f\leqq g.$$

3. Si f_n de C_Ω converge uniformément vers f finie, f appartient à C_Ω.

Théorème de Wiener. *C_Ω comprend les fonctions continues. Autrement dit, pour f continue sur F, l'hypofonction et l'hyperfonction pour Ω, f coïncident.*

Il suffit de voir qu'il existe une fonction continue sur F approchant f à ε arbitraire près et appartenant à C_Ω.

Or si φ continue dans $\Omega+F$ est sousharmonique dans Ω, φ sur F appartient à C_Ω: car $\underline{H}_\varphi(M)$ majorant $\varphi(M)$ dans Ω,

---

[8]) Remarquer que si O_f^Ω est nul en *un* point dans *chaque* domaine de décomposition de Ω, O_f^Ω est partout nul dans Ω.

a en tout point-frontière sa p. p. l. majorant φ et appartient donc à $\mathfrak{F}$, pour φ, ce qui exige $\underline{H}_\varphi = \overline{H}_\varphi$.

Il suffira donc de voir, étant donné f continue, qu'on peut trouver φ_1 et φ_2 continues dans $\Omega + F$, sousharmoniques dans Ω, telles que $\varphi_1 - \varphi_2$ sur F approche f à ε près[9]) : car φ_1 et φ_2 appartenant à C_Ω il en sera de même de $\varphi_1 - \varphi_2$.

On commencera par faire un prolongement continu de f partout ce qui est bien connu (LEBESGUE—URYSOHN)[10]). Puis on approchera le prolongement continu à ε près, dans un cercle Γ où Ω est complètement intérieur, par une différence de deux fonctions continues sousharmoniques: par exemple en l'approchant par un polynôme, aisément décomposable ensuite en différence de deux polynômes sousharmoniques dans Γ.[11])

7. *Etude avec Ω variable.* Après ces études de $\underline{H}_f^\Omega$, $\overline{H}_f^\Omega$, H_f^Ω comme fonctionnelles de f, il y a lieu de les étudier comme *fonctionnelles de Ω*, f étant la fonction définie sur F par les valeurs d'une certaine fonction Φ dans le plan. Voici seulement un théorème qui n'est qu'une transposition avec quelque extension, du théorème fondamental de WIENER à la base de son extension du problème classique de DIRICHLET.

Théorème. *Etant donné Ω et Φ continue dans $\Omega + F$, pour l'ensemble ouvert ω variable contenu dans Ω, $H_\Phi^\Omega(M) - H_\Phi^\omega(M)$ tend vers* 0 *avec la distance maxima à F des points de $\Omega - \omega$, et cela, uniformément pour M sur tout ensemble fermé E de Ω.*

---

9) On reprend là comme BOULIGAND une idée au fond de POINCARÉ.

10) Du théorème très général de URYSOHN (1925) on n'a besoin que du cas particulier de LEBESGUE (1907) dont voici une démonstration au moins peu connue: Pour faire le prolongement continu de f continue sur F fermé quelconque, il suffit de définir $\Phi(M)$ égale à une valeur comprise entre les bornes des valeurs de f aux points de F à distance δ_M minima de M, puis de remplacer $\Phi(M)$ par sa moyenne dans l'aire du cercle de centre M et rayon δ_M.

11) On peut se passer de l'approximation par un polynome en faisant deux médiations spatiales successives à rayon assez petit, ce qui fournit dans Γ une fonction Φ_1 arbitrairement voisine et possédant des dérivées secondes continues et un laplacien ordinaire continu $\Delta \Phi_1$. Les potentiels logarithmiques des couches dans Γ de densités $\frac{1}{2\pi}(\Delta \Phi_1)^-$ et $-\frac{1}{2\pi}(\Delta \Phi_1)^+$ sont continues sousharmoniques et leur différence vaut Φ_1 à une fonction harmonique près.

Etant donné $\varepsilon > 0$ prenons u et v de $\mathfrak{F}_i$ et $\mathfrak{F}_s$ pour Ω et Φ, tels que sur E

$$u \geqq H_\Phi^\Omega - \varepsilon, \quad v \leqq H_\Phi^\Omega + \varepsilon$$

donc

$$v - u \leqq 2\varepsilon.$$

On peut ensuite trouver δ tel que sur Ω et à distance de F au plus égale à δ, on ait $u - \varepsilon \leqq \Phi \leqq v + \varepsilon$.

Donc si ω est tel que la distance maxima à F des points de $\Omega - \omega$ est $\leqq \delta$, tout point-frontière de ω intérieur à Ω sera distant de F d'au plus δ et l'inégalité précédente y aura lieu. D'où dans ω, et par suite sur E si δ est pris assez petit

$$u(M) - \varepsilon \leqq H_\Phi^\omega(M) \leqq v(M) + \varepsilon$$

tandis que

$$u \leqq H_\Phi^\Omega \leqq v$$

donc sur E

$$|H_\Phi^\Omega(M) - H_\Phi^\omega(M)| \leqq v - u + \varepsilon \leqq 3\varepsilon.$$

Cas particulier: Si ω_n dans Ω, tend vers Ω en croissant (sens large), $H_\Phi^{\omega_n}(M) \to H_\Phi^\Omega(M)$ uniformément sur tout ensemble fermé de Ω.

Remarque. Si Φ est sousharmonique dans Ω: $H_\Phi^\omega \leqq H_\Phi^\Omega$.

8. *Etude à la frontière*[12]) *de* $\underline{H}_f^\Omega$, $\overline{H}_f^\Omega$, H_f^Ω.

Lemme (Lebesgue—Bouligand). *S'il existe sur l'intersection de Ω et d'un voisinage du point-frontière M_0 une fonction harmonique ou surharmonique > 0, s'annulant en M_0, il existe dans tout Ω une fonction harmonique > 0 s'annulant en M_0 et de p. p. l. > 0 en tout autre point-frontière.*

Supposons donc que γ_0 étant un domaine circulaire de centre M_0, il existe dans l'intersection $\gamma_0 \cap \Omega$, $h(M)$ surharmonique > 0 s'annulant en M_0. Il suffira de montrer que $H_{\overline{M_0 M}}$ qui majore $\overline{M_0 M}$ sousharmonique, s'annule en M_0.

Soit γ un domaine circulaire concentrique plus petit, de rayon ϱ et circonférence γ'. Si γ' rencontre Ω, soit sur γ' un ensemble e fermé contenu dans Ω et dont la mesure angulaire sur γ' diffère de celle de $\gamma' \cap \Omega$ de moins de $2\pi \frac{\varrho}{D}$, D étant le maximum de $\overline{M_0 M}$ sur F. Soit K la borne inférieure > 0 de

12) Etude essentiellement inspirée des travaux anciens de Lebesgue.

h sur e. Introduisons l'intégrale de POISSON $I(M)$ pour γ, formée avec la valeur D sur $(\gamma' \cap \Omega) - e$ et 0 ailleurs. Au centre

$$0 \leqq I(M_0) \leqq \varrho.$$

Soit alors u quelconque de $\mathfrak{F}_i$ pour Ω et $\overline{M_0 M}$; $u \leqq D$. Etudions-la dans $\gamma \cap \Omega$ de frontière α. Aux points de α sur F:

$$\text{p. g. l. } u \leqq \varrho.$$

Si γ' ne rencontre pas Ω, α appartient à F; donc dans Ω:

$$u \leqq \varrho$$

et

$$H_{\overline{M_0 M}} \leqq \varrho.$$

Si γ' rencontre Ω, la fonction sousharmonique dans $\gamma \cap \Omega$

$$u(M) - \varrho - \frac{D}{K} h(M) - I(M)$$

admet en tout point-frontière, qu'il appartienne à F, e ou $\gamma' - e$, une p. g. l. $\leqq 0$. Elle est donc $\leqq 0$.

Donc dans $\gamma \cap \Omega$,

$$H_{\overline{M_0 M}}(M) \leqq \varrho + \frac{D}{K} h(M) + I(M)$$

d'où

$$\underset{M \to M_0}{\text{p. g. l.}}\ H_{\overline{M_0 M}}(M) \leqq \varrho + I(M_0) \leqq 2\varrho$$

et comme ϱ est arbitraire > 0

$$\underset{M \to M_0}{\text{p. g. l.}}\ H_{\overline{M_0 M}} \leqq 0$$

donc

$$H_{\overline{M_0 M}}(M) \to 0 \quad \text{quand} \quad M \to M_0.$$

Définition. Un point-frontière O d'un ensemble ouvert quelconque ω sera dit *régulier* pour ω s'il existe sur l'intersection de ω et d'un voisinage de O une fonction harmonique (ou ce qui est équivalent surharmonique) > 0 s'annulant en O. Sinon irrégulier.

Théorème. *M_0 de F étant régulier pour Ω, si f est semi-continue supérieurement en M_0:*

$$\underset{M \to M_0}{\text{p. g. l.}}\ \overline{H}_f^{\Omega}(M) \leqq f(M_0)$$

et de même, ce qui est équivalent, si f est semi-continue inférieurement en M_0,

$$\underset{M \to M_0}{\text{p. p. l.}}\ \underline{H}_f^{\Omega}(M) \geqq f(M_0).$$

Soit v harmonique dans Ω, s'annulant en M_0, de p. p. l. > 0 aux autres points-frontière. Etant donné $\varepsilon > 0$, soit $\varrho > 0$ tel que $\overline{M_0 M} < \varrho$ entraine $f(M) < f(M_0) + \varepsilon$ et K le minimum de v pour $\overline{M_0 M} \geqq \varrho$.

La fonction harmonique $f(M_0) + \varepsilon + \dfrac{v}{K}[\overline{B}_f - f(M_0)]$ admet en tout point-frontière une p. p. l. $\geqq f$ donc fait partie de $\mathfrak{F}_s$ pour f.

Ainsi :

$$\overline{H}_f \leqq f(M_0) + \varepsilon + \frac{v(M)}{K}[\overline{B}_f - f(M_0)],$$

$$\underset{M \to M_0}{\text{p. g. l.}}\ \overline{H}_f \leqq f(M_0) + \varepsilon$$

et puisque ε est arbitraire,

$$\underset{M \to M_0}{\text{p. g. l.}}\ \overline{H}_f \leqq f(M_0).$$

Corollaire. *Si f est continue en M_0 régulier, $\underline{H}_f(M)$ et $\overline{H}_f(M)$ tendent vers $f(M_0)$ quand $M \to M_0$, donc aussi H_f s'il existe.*

Critère: pour que M_0 soit régulier, il faut et suffit que pour *une* fonction f semi-continue inférieurement atteignant son minimum en M_0 seulement, $\underline{H}_f(M) \to f(M_0)$ quand $M \to M_0$.

Les suites régulières. Une suite de points M_n de ω ouvert tendant vers un point-frontière M_0 sera dite *régulière* pour ω, s'il existe sur l'intersection de ω et d'un voisinage de M_0 une fonction harmonique $v > 0$ telle que $v(M_n) \to 0$. Sinon irrégulière.

Il y a extension immédiate des énoncés qui précèdent en faisant tendre M vers M_0 sur la suite M_n. Pour que M_0 soit régulier il faut et suffit que toutes les suites $M_n \to M_0$ soient régulières.

9. *Le problème de Dirichlet.* Le problème classique consiste, étant donnée f continue sur la frontière F de Ω borné, à trouver une fonction harmonique dans Ω, prenant en chaque point-frontière une valeur limite déterminée égale à f.

Il ne peut y avoir deux solutions distinctes ; s'il y en a une, elle appartient à $\mathfrak{F}_i$ et $\mathfrak{F}_s$ et vaut donc H_f^{Ω}.

Pour que, Ω étant donné, il y ait une solution *quelle que soit f continue,* il faut et suffit que tous les points-frontière soient réguliers pour Ω.

Dans le cas général avec f continue, on avait appelé solution généralisée (ou de WIENER) notre fonction de WIENER.

Elle prend la valeur f en tout point-frontière régulier et tend vers $f(M_0)$ sur toute suite régulière $M_n \to M_0$.

II. Extensions et compléments.

10. *Rappel de quelques notions.* Une fonction $u(M)$ dans ω ouvert y est dite *sousharmonique au sens le plus général* si:

1° $u(M)$ est en chaque point finie ou vaut $-\infty$ et est semi-continue supérieurement,

2° $u(M)$ est sommable sur tout ensemble borné fermé de ω et est en chaque point M au plus égale à la moyenne dans tout domaine circulaire de centre M et rayon assez petit.

Comme dans le cas de u continue, mêmes conséquences pour l'impossibilité de maximum, pour la borne supérieure et la propriété $u \leqq 0$ si p. g. l. $u \leqq 0$ à la frontière de ω *borné*.

Soit ω_0 borné complètement intérieur, de frontière F_0 à points tous réguliers (comme c'est le cas pour le cercle et le carré); soit sur F_0, φ_n continue, décroissante de limite u. Dans ω_0, $H_{\varphi_n}^{\omega_0}$ majore u, décroît; sa limite $\bar{u}_{\omega_0}$ indépéndante de φ_n est harmonique, majore u et son prolongement par u est sousharmonique dans tout ω. Si ω_0 est un cercle, on voit que u est sommable sur la circonférence et que $\bar{u}_{\omega_0}$ est l'intégrale de Poisson correspondante, ce qui entraine $u(M_0) \leqq \mathfrak{M}_{M_0}^{r} u$ (donc $u(M_0) \leqq \mathfrak{A}_{M_0}^{r} u$). L'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions sousharmoniques, si elle est en chaque point $\neq +\infty$ et semi-continue supérieurement est sousharmonique.

Propriétés immédiates des fonctions *surharmoniques* opposées aux sousharmoniques.

On dit qu'un ensemble borélien borné E est de *capacité nulle* si toute charge >0 (distribuée selon une fonction $\geqq 0$ additive d'ensemble borélien) donne un potentiel non borné supérieurement. Soulignons le résultat de G. C. Evans[13]), que si E est fermé, *il existe une charge finie* >0 *assurant un potentiel égal à* $+\infty$ *sur* E.

Enfin sur la frontière de Ω borné, *l'ensemble des points irréguliers* est de capacité nulle (Kellogg—Evans) et même est la réunion dénombrable d'ensembles fermés de capacité nulle[14]). On en déduit [14]), d'après le résultat de Evans, *l'existence d'une*

[13]) G. C. Evans, Potentials and Positively Infinite Singularities of Harmonic Functions, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **43** (1936), pp. 419—424. Résultat valable dans l'espace à $n \geqq 2$ dimensions.

[14]) *Voir* M. Brelot, Problème de Dirichlet et majorantes harmoniques, *Bulletin des sciences math.*, **63** (1939), pp. 79—96 et 115—128.

fonction harmonique >0 *dans* Ω, *tendant vers* $+\infty$ *en tout point-frontière irrégulier*

Je rappelle [14]) pour éclairer le sujet, que l'ensemble des points irréguliers pour Ω est la somme des ensembles (d'ailleurs disjoints) des points irréguliers pour les divers domaines composants.

11. *Extension du Théorème de Perron.*

Théorème. *Soit sur la frontière* F *de* Ω *ouvert borné, une fonction* f *égale en chaque point à un nombre fini, à* $+\infty$ *ou à* $-\infty$. *On considère la famille* $\mathfrak{G}_i$ *des fonctions sousharmoniques générales dans* Ω, *de* p. g. l. $\leq f$ *à la frontière. Si* $\mathfrak{G}_i$ *est non vide, son enveloppe supérieure* $T(M)$ *vaut dans chaque domaine composant,* $+\infty$ *ou une fonction harmonique; il y a alors, dans la famille, des fonctions continues et leur enveloppe supérieure est la même.*

Soit en effet le point P de Ω. $T(P) \neq -\infty$ car si on prend u de $\mathfrak{G}_i$ et qu'on la remplace dans un cercle de centre P par son intégrale de Poisson, on obtient une nouvelle fonction de $\mathfrak{G}_i$, finie en P.

Supposons $T(P)$ fini. Alors en reprenant le raisonnement de n° **4** et remplaçant k par une fonction $v(M)$ de $\mathfrak{G}_i$ harmonique au voisinage de P, on voit que $T(M)$ est continue sousharmonique au voisinage de P. Si maintenant $T(P)=+\infty$, T vaut $+\infty$ au voisinage. C'est ce qu'on voit en introduisant par exemple une suite de fonctions de $\mathfrak{G}_i$, harmoniques et bornées inférieurement dans leur ensemble dans un cercle de centre P mais tendant en P vers $+\infty$.

En conclusion si $T(P)$ est finie, elle est dans tout le domaine ω de décomposition contenant P, continue sousharmonique et on voit l'harmonicité comme au n° **4,** en utilisant des fonctions de $\mathfrak{G}_i$ harmoniques au voisinage des points considérés. Si $T(P)=+\infty$, T vaut $+\infty$ dans tout ω.

Voyons enfin que si u appartient à $\mathfrak{G}_i$, il existe dans $\mathfrak{G}_i$ une fonction continue qui majore u. Grâce à un réseau, on peut former une suite de domaines carrés Q_n n'empiétant pas, complètement intérieurs à Ω, dont la somme des fermetures est Ω et tels que le côté et la distance à F de Q_n tendent vers 0 avec $\frac{1}{n}$. En remplaçant dans chaque Q_n, u par $\bar{u}_{Q_n}$, on obtient une fonction de $\mathfrak{G}_i$ qui ne peut avoir de discontinuités que sur les côtés des carrés. On recommence l'opération avec un autre réseau orienté différemment et il ne reste plus qu'un ensemble dénombrable de points de discontinuité. Une nouvelle opération convenable les fait disparaître et résoud la question.

Remarque. On a un théorème analogue avec la famille $\mathfrak{G}_s$ des fonctions surharmoniques de p. p. l. $\geqq f$ sur F. Mais si $\mathfrak{G}_i$ et $\mathfrak{G}_s$ sont simultanément non vides, *toute fonction de* $\mathfrak{G}_s$ *ne majore pas nécessairement toute fonction de* $\mathfrak{G}_i$. Il suffit de voir que dans le cercle de rayon 1 diminué de son centre O avec $f=0$ sur la circonférence et $f(O)=+\infty$ (ou $-\infty$), $K\log\frac{1}{\overline{OM}}$ appartient à $\mathfrak{G}_i$ et $\mathfrak{G}_s$ quel que soit $K>0$.

12. *Hypofonction, hyperfonction, distribution résolutive et fonction de Wiener générales.* Pour éviter l'inconvénient précédent on va restreindre les familles. Il sera plus clair d'étudier d'abord chaque domaine composant.

Supposons Ω domaine. Soit $\mathfrak{G}'_i$ la famille partielle (de $\mathfrak{G}_i$) des fonctions dont chacune est *bornée supérieurement.* En raisonnant comme plus haut on voit que *si* $\mathfrak{G}'_i$ *est non vide l'enveloppe supérieure $T'(M)$ est $+\infty$ ou une fonction harmonique; il y a alors dans* $\mathfrak{G}'_i$ *des fonctions continues et leur enveloppe est la même.*

On définira l'*hypofonction* $\underline{H}_f^\Omega(M)$ en posant:

$$\underline{H}_f^\Omega(M)=-\infty \qquad \text{si } \mathfrak{G}'_i \text{ est vide}$$
$$\underline{H}_f^\Omega(M)=T'(M) \qquad \text{si } \mathfrak{G}'_i \text{ est non vide.}$$

Introduction analogue de $\mathfrak{G}'_s$ et de l'hyperfonction $\overline{H}_f^\Omega$. *Constatons que:* $\underline{H}_f^\Omega\leqq\overline{H}_f^\Omega$.

Le seul cas non immédiat est celui où $\mathfrak{G}'_i$ et $\mathfrak{G}'_s$ sont simultanément non vides. Soient alors u et v de $\mathfrak{G}'_i$ et $\mathfrak{G}'_s$; $u-v$ est sousharmonique et en tout point frontière P sa p. g. l. est $\leqq 0$, dans les 3 cas: $f(P)$ fini, $f(P)=\pm\infty$; donc $u-v\leqq 0$ dans Ω.

Si Ω est un ensemble ouvert borné quelconque, l'hypofonction et l'hyperfonction, notées encore $\underline{H}_f^\Omega$, $\overline{H}_f^\Omega$ seront par définition égales dans chaque domaine composant ω_k à $\underline{H}_f^{\omega_k}$, $\overline{H}_f^{\omega_k}$ où f est prise sur la seule frontière de ω_k.

On remarquera que de toute fonction sousharmonique dans Ω, de p. g. l. $\leqq f$ à la frontière et bornée supérieurement dans chaque domaine composant, on en déduit par simple addition d'une constante dans chaque domaine, une autre fonction analogue, mais bornée supérieurement dans Ω. C'est ainsi que si $\mathfrak{G}'_i$ désigne encore la famille partielle de $\mathfrak{G}_i$ des fonctions chacune bornée supérieurement, $\mathfrak{G}_i''$ celle des fonctions dont chacune est bornée supérieurement dans chaque domaine composant, ces familles sont simultanément vides ou non, et si elles sont non vides, elles ont la même enveloppe supérieure qui est $\underline{H}_f$.

Si $\underline{H}_f^\Omega$ et $\overline{H}_f^\Omega$ sont partout *finies* et égales, f sera dite *résolutive* et la valeur commune, harmonique, notée H_f^Ω de l'hypofonction et de l'hyperfonction sera dite *fonction de Wiener* pour Ω, f.

On pourra avec quelques conventions et restrictions généraliser les propriétés indiquées au chapitre I pour ces fonctionnelles. En particulier $\underline{H}_f^\Omega = -\overline{H}_{-f}^\Omega$ et on se dispensera des énoncés pour l'hyperfonction corrélatifs de ceux pour l'hypofonction.

13. *On supposera désormais* pour simplifier un peu, que Ω *est un domaine.* Approfondissons la composition de $\mathfrak{G}_i'$.

Voici d'abord comme lemme une proposition, d'ailleurs valable, et j'en souligne l'intérêt, pour Ω borné quelconque.

Lemme. *Si f est bornée supérieurement et, en M_0 régulier, semi-continue supérieurement, alors*

$$\underset{M \to M_0}{\text{p. g. l.}}\ \overline{H}_f^\Omega(M) \leqq f(M_0)$$

donc aussi

$$\underset{M \to M_0}{\text{p. g. l.}}\ \underline{H}_f^\Omega(M) \leqq f(M_0).$$

Si $f(M_0)$ est fini, on reprendra la démonstration du théorème du n° **8**; si $f(M_0) = -\infty$ on fera un raisonnement analogue.

Théorème. *Si $\mathfrak{G}_i'$ est non vide, elle comprend des fonctions harmoniques et leur enveloppe supérieure est encore $\underline{H}_f^\Omega$.*[15])

Soit u de $\mathfrak{G}_i'$ et φ la fonction de ses p. g. l. à la frontière; $\varphi \leqq f$ et $\underline{H}_\varphi^\Omega$, bornée supérieurement comme φ, est harmonique et de p. g. l. $\leqq \varphi$ en tout point-frontière régulier.

Si v est une fonction harmonique > 0 dans Ω, tendant vers $+\infty$ en tout point-frontière irrégulier et $\lambda =$ Constante > 0, $\underline{H}_\varphi^\Omega - \lambda v$ est harmonique et appartient à $\mathfrak{G}_i'$. Soit P fixé dans Ω.

---

[15]) Ici (voir à ce propos la référence de la note [14])) va intervenir le théorème d'existence d'Evans souligné dans l'introduction. Mais ce qui est essentiel pour le lemme 2 du n° **14** dont dérive le résultat final, c'est seulement, dans le théorème suivant du n° **13**, le fait que u sousharmonique borné supérieurement, de p. g. l. $\leqq f$ aux points réguliers est $\leqq \underline{H}_f$ et sa démonstration s'appuie sur le théorème d'Evans qui joue là son rôle le plus important.

Si $\underline{H}_f^\Omega(P)$ est fini supposons u tel que $u(P) > \underline{H}_f^\Omega(P) - \varepsilon$. Alors $\underline{H}_\varphi^\Omega(P) > \underline{H}_f^\Omega(P) - \varepsilon$ et si λ est assez petit

$$\underline{H}_\varphi^\Omega(P) - \lambda v(P) > \underline{H}_f^\Omega(P) - 2\varepsilon.$$

Si $\underline{H}_f^\Omega(P) = +\infty$ on disposera de u, puis de λ pour que $\underline{H}_\varphi^\Omega(P) - \lambda v(P)$ soit arbitrairement grand.

Théorème. *$\underline{H}_f^\Omega$ ne dépend pas des valeurs de f aux points irréguliers. Si $\underline{H}_f^\Omega$ est $\neq -\infty$ il existe des fonctions sousharmoniques dans Ω, générales ou seulement continues ou même seulement harmoniques et dont chacune est bornée supérieurement et de* p. g. l. *$\leqq f$ aux points-frontière réguliers; et $\underline{H}_f^\Omega$ est l'enveloppe supérieure de chacune de ces trois familles. Si $\underline{H}_f^\Omega = -\infty$, il n'existe pas de fonctions de ces natures.*

Supposons $\underline{H}_f^\Omega \neq -\infty$, c. à d. non vide. Les trois familles considérées sont non vides et leurs enveloppes supérieures majorent $\underline{H}_f^\Omega$ et aussi tout $\underline{H}_{f_1}^\Omega$, où f_1 coïncide avec f aux points réguliers. Or si u est fonction d'une de ces familles et v la même fonction harmonique que précédemment $u - \lambda v\,(\lambda > 0)$ est sousharmonique, de p. g. l. à la frontière au plus égale à f ou f_1. D'après cela $\underline{H}_{f_1}^\Omega \neq -\infty$, $u \leqq \underline{H}_f^\Omega$, $u \leqq \underline{H}_{f_1}^\Omega$. De sorte que les enveloppes considérées coïncident avec $\underline{H}_{f_1}^\Omega$ et $\underline{H}_f^\Omega$ qui sont donc égales.

Si maintenant $\underline{H}_f^\Omega = -\infty$, il en est de même de $\underline{H}_{f_1}^\Omega$, puisque de $\underline{H}_{f_1}^\Omega \neq -\infty$ résulterait d'après ce qui précéde $\underline{H}_f^\Omega \neq -\infty$. Il n'y a pas de fonction des natures indiquées sinon pour l'une d'elles la p. g. l. à la frontière serait du type f_1 avec $\underline{H}_{f_1}^\Omega \neq -\infty$.

14. *Critères et représentation intégrale des fonctionnelles* (Ω domaine).

Lemme 1. *$\underline{H}_f^\Omega$ est l'enveloppe supérieure des $\underline{H}_\varphi^\Omega$ où φ est bornée supérieurement, semi-continue supérieurement et $\leqq f$. On peut même trouver une suite croissante φ_n de tels φ telle que $\underline{H}_{\varphi_n}^\Omega$ tende en croissant vers $\underline{H}_f^\Omega$.*

La première partie est immédiate. Quant à la seconde, si $\underline{H}_f^\Omega$ est finie, on choisira dans les φ, ψ_n tel que

$$\underline{H}_f^\Omega(M_0) - \underline{H}_{\psi_n}^\Omega(M_0) < \varepsilon_n \to 0 \quad (M_0 \text{ fixé dans } \Omega);$$

on prendra φ_n égale à l'enveloppe supérieure sur F de $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$; alors $\underline{H}_{\varphi_n}^\Omega(M_0) \to \underline{H}_f^\Omega(M_0)$ et la limite de $\underline{H}_{\varphi_n}^\Omega$, majorée par $\underline{H}_f^\Omega$, harmonique comme cette fonction, lui est égale dans tout Ω.

Donc $\underline{H}^{\Omega}_{\varphi_n}(M) \to \underline{H}^{\Omega}_f$. Démonstration immédiate ou analogue si $\underline{H}^{\Omega}_f = \pm\infty$.

L e m m e 2. *Si f est bornée supérieurement et semi-continue supérieurement, $\underline{H}^{\Omega}_f$ est la borne inférieure des H^{Ω}_{θ} pour θ bornée, continue, $\geqq f$ et la limite de $H^{\Omega}_{\theta_n}$ pour θ_n bornée, continue, décroissante, de limite f; et si $\underline{H}^{\Omega}_f \neq -\infty$, f est résolutive.*

D'abord on voit que l'enveloppe inférieure des H^{Ω}_{θ} et la limite de $H^{\Omega}_{\theta_n}$ coïncident, car quels que soient θ et ε fixés, on a, pour n assez grand, $\theta_n \leqq \theta + \varepsilon$ d'où $H^{\Omega}_{\theta_n} \leqq H^{\Omega}_{\theta} + \varepsilon$. Soit $\lambda(M)$ cette fonction limite, bornée supérieurement, qui est soit $-\infty$ soit harmonique. $\lambda \geqq \overline{H}^{\Omega}_f$.

Si $\lambda = -\infty$, $\overline{H}^{\Omega}_f = \underline{H}^{\Omega}_f = -\infty$.

Si λ est harmonique, comme en tout point-frontière régulier M_0, $\underset{M \to M_0}{\text{p. g. l.}}\, H^{\Omega}_{\theta_n} \leqq \theta_n(M_0)$, on aura $\underset{M \to M_0}{\text{p. g. l.}}\, \lambda(M) \leqq \theta_n(M_0)$ puis $\underset{M \to M_0}{\text{p. g. l.}}\, \lambda(M) \leqq f(M_0)$ et d'après le dernier théorème du n° **13**: $\lambda \leqq \underline{H}^{\Omega}_f$. D'où $\lambda = \underline{H}^{\Omega}_f = \overline{H}^{\Omega}_f$.

15. On connait la théorie fondée par F. RIESZ de la *représentation des fonctionnelles linéaires par des intégrales de* LEBESGUE—STIELTJES. Selon des résultats généraux, il est immédiat que, *dans le champ au moins des fonctions f bornées continues,* $H^{\Omega}_f(M)$ peut s'écrire $\int_F f(P)\, d\mu^M(P)$ où pour M fixé, μ^M est une fonction *unique* $\geqq 0$ additive d'ensemble borélien sur F.

On remarquera que l'on connait déjà cette fonction d'ensemble μ^M: c'est celle qui représente la distribution de masses sur F obtenue par balayage de Ω pourvue de la masse 1 en M et dont je ne rappellerai pas ici toutes les propriétés. Les diverses théories du balayage conduisent en effet avec cette signification de μ^M à la représentation par $\int_F f\, d\mu^M$ (selon WIENER—DE LA VALLÉE POUSSIN) de la solution de WIENER relative à Ω et f continue.

La connaissance de ce μ^M entraine, comme on sait, la définition générale pour les ensembles de F, d'une mesure extérieure, d'une mesure intérieure, d'une mesurabilité (μ^M).

On sait alors, pour $f \geqq 0$ et mesurable (μ^M) sur F, définir $\int_F f\, d\mu^M$ fini ou non. Pour f quelconque sur F, mesurable (μ^M), on dira qu'elle est *sommable* (μ^M), si, grâce à la décomposition classique $f = f^+ - f^-$, $\int_F f^+\, d\mu^M$ et $\int_F f^-\, d\mu^M$ sont finis, et *sommable*

(μ^M) *au sens large* si l'une au moins de ces quantités est finie; et on posera dans ces cas

$$\int_F f d\mu^M = \int_F f^+ d\mu^M - \int_F f^- d\mu^M.$$

Enfin on sait, et c'est presque immédiat, que au moins pour un ensemble e ouvert ou fermé sur F, $\mu^M(e)$ est fonction harmonique de M dans Ω: la fonction égale à 1 sur e, à 0 ailleurs sur F étant semi-continue est la limite d'une suite monotone de fonctions θ_n continues et $\int_F \theta_n d\mu^M$ qui tend vers $\mu^M(e)$ tend aussi, puisque monotone et harmonique, vers une fonction harmonique. Mais alors la mesure extérieure, dérivée du (μ^M) initial, d'un ensemble quelconque de F est, considérée comme fonction de M, l'enveloppe inférieure de fonctions harmoniques comprises entre 0 et 1 donc est continue surharmonique. De même la mesure intérieure est continue sousharmonique et d'ailleurs au plus égale à la précédente. La coïncidence en un point entraine la coïncidence partout dans Ω, donc l'harmonicité par rapport à M de la mesure de l'ensemble considéré. *Ainsi la mesurabilité* (μ^M) *et la sommabilité* (large ou non) (μ^M) *sont indépendantes de* M *dans le domaine* Ω, de sorte qu'on dira simplement „mesurable (μ)“ et „sommable (μ)“. On n'a voulu faire appel, pour arriver à ce résultat, qu'à des notions du chapitre I mais nous reviendrons sur l'interprétation et les propriétés des mesures (extérieure et intérieure) précédentes.

16. Reprenons d'abord le lemme 2 et le cas de f bornée supérieurement et semi-continue supérieurement. Si θ_n bornée continue décroissante tend vers f,

$$\underline{H}_f^\Omega(M) = \lim H_{\theta_n}^\Omega(M)$$

et

$$H_{\theta_n}^\Omega(M) = \int_F \theta_n d\mu^M \to \int_F f d\mu^M.$$

Ainsi $\underline{H}_f^\Omega = \int_F f d\mu^M$; la condition $\underline{H}_f^\Omega \neq -\infty$ s'exprime par la sommabilité (μ) de f et entraine que f soit résolutive, avec $H_f^\Omega(M) = \int_F f d\mu^M$.

Théorème. *Quelle que soit f fixée, il existe sur F une fonction $\psi \leqq f$, mesurable (μ), sommable (μ) au sens large, telle que*

$$\underline{H}_f^\Omega(M) = \int_F \psi \, d\mu^M$$

quel que soit M de Ω.

C'est évident si $\underline{H}_f^\Omega = -\infty$ en prenant $\psi = -\infty$.

Supposons $\underline{H}_f^\Omega \neq -\infty$. Il existe d'après le lemme 1 une suite croissante $\varphi_n \leqq f$ de fonctions, chacune bornée supérieurement et semi-continue supérieurement, telle que $\underline{H}_{\varphi_n}^\Omega(M)$ soit $\neq -\infty$ et, d'ailleurs valant $H_{\varphi_n}^\Omega = \int_F \varphi_n \, d\mu^M$, tende vers $\underline{H}_f^\Omega$.

Si ψ est la limite de φ_n, elle est sommable (μ) au sens large et $\int_F \varphi_n d\mu^M \to \int_F \psi d\mu^M$ d'où l'énoncé, le ψ mis en évidence étant d'ailleurs au plus de la seconde classe de BAIRE.

Théorème. *Quelle que soit $\alpha(M) \leqq f(M)$ sur F, mesurable (μ) et sommable (μ) au sens large,* $\int_F \alpha d\mu^M \leqq \underline{H}_f^\Omega(M)$.

C'est évident si $\int_F \alpha d\mu^M = -\infty$. Sinon il existe d'après la théorie de l'intégration, une suite croissante de fonctions $\varphi_n \leqq \alpha$, dont chacune est bornée supérieurement, semi-continue supérieurement, et qui est telle que $\int_F \varphi_n d\mu^M \neq -\infty$ tende vers $\int_F \alpha d\mu^M$. Comme $\int_F \varphi_n d\mu^M = H_{\varphi_n}^\Omega \leqq \underline{H}_f^\Omega$, on conclut aussitôt.

Corollaires. 1. *Pour que $\underline{H}_f^\Omega \neq -\infty$ (c. à d. $\mathfrak{G}_i'$ non vide) il faut et suffit que f majore une fonction φ mesurable (μ) et sommable (μ).*

Supposons $\underline{H}_f^\Omega \neq -\infty$. Alors le ψ de l'avant-dernier théorème, limité au besoin supérieurement par 0 (c. à d. remplacé par $-\psi^-$) répond à la question. Plus directement il existe une fonction de $\mathfrak{G}_i'$ et sa p. g. l. à la frontière répond à la question (elle est d'ailleurs bornée supérieurement et semi-continue supérieurement).

La condition est suffisante car $\int_F \varphi d\mu^M$ étant fini, $\underline{H}_f^\Omega$ qui le majore est $\neq -\infty$.

2. *Si $\underline{H}_f^\Omega$ est fini, la fonction $\psi \leqq f$ de la représentation intégrale de $\underline{H}_f^\Omega$ est unique à une altération près sur un ensemble de mesure (μ) nulle.*

Soient en effet ψ_1, ψ_2 répondant à la question

$$\int_F \psi_1 d\mu^M = \int_F \psi_2 d\mu^M = \underline{H}_f^\Omega \text{ fini.}$$

L'enveloppe supérieure Ψ de ψ_1 et ψ_2 a une intégrale qui majore les précédentes, mais qui d'après le dernier théorème est majorée par $\underline{H}_f^{\Omega}$. Donc ψ_1, ψ_2 majorés par Ψ et de même intégrale finie, n'en diffèrent que sur un ensemble de mesure (μ) nulle et il en est de même entre eux.

Théorème. *Pour que f soit résolutive il faut et suffit que f soit mesurable (μ) et sommable (μ) et alors*

$$H_f^{\Omega}(M) = \int_F f d\mu^M.$$

Si $\underline{H}_f^{\Omega} = \overline{H}_f^{\Omega}$ fini, il existe deux fonctions $\psi_1 \leqq f$ et $\psi_2 \geqq f$ mesurables (μ) et sommables (μ) telles que

$$\int_F \psi_1 d\mu^M = \int_F \psi_2 d\mu^M.$$

Elles doivent coïncider presque partout (μ); donc f intermédiaire est mesurable (μ) et sommable (μ). Réciproquement cette condition entraine d'après le théorème qui précède

$$\int_F f d\mu^M \leqq \underline{H}_f^{\Omega}$$

et de même

$$\int_F f d\mu^M \geqq \overline{H}_f^{\Omega}$$

d'où

$$\underline{H}_f^{\Omega} = \overline{H}_f^{\Omega} \text{ fini } = H_f^{\Omega} = \int_F f d\mu^M.$$

Cas particulier. Si f est bornée et borélienne, elle est résolutive[16]).

Remarques. 1. Si $\underline{H}_f^{\Omega}$ et $\overline{H}_f^{\Omega}$ sont finis, ils ne sont égaux que si f est mesurable (μ).

2. Si f est mesurable (μ), pour que $\underline{H}_f^{\Omega}$ (ou $\overline{H}_f^{\Omega}$) soit fini, il faut et suffit que f^- (ou f^+) soit sommable (μ).

Mesure harmonique. Soit sur F un ensemble E quelconque, de fonction caractéristique Φ_E (égale à 1 sur E, à 0 ailleurs). On verra aisément que les mesures extérieure et intérieure de E déduites de (μ^M), valent $\overline{H}_{\Phi_E}^{\Omega}(M)$ et $\underline{H}_{\Phi_E}^{\Omega}(M)$. On les appellera mesure harmonique ou poids, respectivement extérieur ou intérieur, de E relativement à Ω. Si E est mesurable (μ), elles sont confondues

---

16) L'exemple contraire qu'avait cru donner M. Wiener (*loc. cit.* 6), p. 29) est inexact, comme on peut le voir facilement de manière directe.

et valent $H^{\Omega}_{\Phi_E}(M)$, dit aussi poids ou mesure harmonique de E relativement à Ω. Cela contient bien des définitions et propriétés données à ce sujet[17]) dans des cas plus ou moins généraux et adaptés à notre hypothèse de Ω borné qu'il serait d'ailleurs aisé d'élargir. Soulignons seulement que, sur F, les ensembles (boréliens ou non) de capacité nulle (c. à d. dont tout sous-ensemble fermé est de capacité nulle au sens bien classique) sont de mesure harmonique *intérieure* nulle.

(Reçu le 25 mai 1939)

---

[17]) *Voir* outre WIENER (loc. cit.): R. NEVANLINNA, *Eindeutige analytische Funktionen* (Leipzig, 1936); A. J. MARIA, The Potential of a Positive Mass and The Weight Function of Wiener, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A.*, **20** (1934), pp. 485–489; J. SIRE, Sur le problème de Dirichlet, la fonction potentielle et l'ensemble des points irréguliers, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, **197** (1933), pp. 294–296.